Cadre : $\mathbb{K}$ est un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$.

I Formes linéaires et espace dual

1) Généralités sur les formes linéaires

Définition 1. Une forme linéaire sur E est une application de E dans $\mathbb{K}$. On note $E^\star = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaires sur E, appelé espace dual de E.

Exemple 2. *(i)* $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_k$ *est une forme linéaire sur* $\mathbb{K}^n$.

(ii) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, l'application* $f_A : M \mapsto \mathrm{tr}(AM)$ *est une forme linéaire sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(iii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* $f : E \to \mathbb{R}$ *est différentiable en un point* a*, alors* $d_a f$ *est une forme linéaire.*

(iv) Le morphisme d'évaluation $ev_a : P \mapsto P(a)$ *en un point* $a \in \mathbb{K}$ *est un morphisme sur* $\mathbb{K}_n[X]$.

Proposition 3. *Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan de* E*. Réciproquement, tout hyperplan de* E *est le noyau d'une forme linéaire non nulle.*

Exemple 4. *Si* A *est non nulle,* $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \,|\, \mathrm{tr}(AM) = 0\}$ *est un hyperplan de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2) Espace dual et base duale

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Définition 5. On appelle base duale de $\mathcal{B}$ la famille $\mathcal{B}^\star = (e_1^\star, \dots, e_n^\star)$, où chaque $e_i^\star$ est défini par $e_i^\star(e_j) = \delta_{i,j}$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$.

Exemple 6. *Dans* $\mathbb{R}^2$*, si* $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$*, alors* $\mathcal{B}^\star = (e_1^\star, e_2^\star)$ *avec* $e_1^\star : (x,y) \mapsto x$ *et* $e_2^\star : (x,y) \mapsto y$.

Proposition 7. *Toute base duale est une base de* $E^\star$*. En particulier,* $\dim(E) = \dim(E^\star)$*, et pour tout* $\varphi \in E^\star$ *on a* $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^\star$.

Corollaire 8. *L'application suivante est un isomorphisme :*

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^\star \\ x = \sum_{i=1}^n x_i e_i & \longmapsto & \varphi = \sum_{i=1}^n x_i e_i^\star \end{array}$$

Il n'est pas canonique car dépend de la base $\mathcal{B}$ *choisie.*

Théorème 9. *Soit* H *un espace de Hilbert. Alors pour toute application* $\phi \in H' = H^\star$*, il existe un unique* $f \in H$ *tel que, pour tout* $v \in H$*, on ait* $\phi(v) = \langle f, v \rangle$*. De plus,* $\phi \mapsto f$ *est une isométrie.*

Application 10. *Si* E *est l'espace euclidien (resp. hermitien)* $\mathbb{R}^n$ *(resp.* $\mathbb{C}^n$*) muni de son produit scalaire usuel, on a l'isomorphisme canonique de* E *dans* $E^\star$ *qui à* x *associe* $y \mapsto \langle x, y \rangle$.

Proposition 11. *L'application* $f : A \mapsto f_A$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *dans son dual. De plus, toute forme linéaire* f *sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *vérifiant* $f(XY) = f(YX)$ *et colinéaire à la trace.*

Application 12. *Si* $n \geqslant 2$*, tout hyperplan de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *coupe* $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

3) Espace bidual et base antéduale

Définition 13. $E^{\star\star} = (E^\star)^\star$ est appelé espace bidual de E

Proposition 14. *On a un isomorphisme de* E *dans* $E^{\star\star}$ *donné par :*

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^{\star\star} \\ x & \longmapsto & (f \mapsto f(x)) \end{array}$$

Proposition 15. *Soit* $\mathcal{B}^\star = (f_1, \dots, f_n)$ *une base de* $E^\star$*. Alors il existe une unique base* $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ *de* E *dont* $\mathcal{B}^\star$ *est la base duale.* $\mathcal{B}$ *est alors appelée base antéduale de* $\mathcal{B}^\star$.

Exemple 16. *Soient* $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ *une famille de points de* $\mathbb{K}$ *deux à deux distincts. Notons* $\ell_i = \prod_{i \neq j} \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \in \mathbb{K}_n[X]$ *et* $\mathcal{B}^\star = (\ell_0, \dots, \ell_n)$ *la base de* $\mathbb{K}_n[X]^\star$ *des polynômes de Lagrange. Alors la base antéduale de* $\mathcal{B}$ *est* $(ev_{x_0}, \dots, ev_{x_n})$.

II Autour de l'orthogonalité

1) Notion d'orthogonalité

Définition 17. Pour $A \subseteq E$ et $B \subseteq E^\star$, on note :

(i) $A^\perp = \{\varphi \in E^\star \,|\, \forall x \in A, \varphi(x) = 0\}$ l'orthogonal de A dans $E^\star$.

(ii) $B^\circ = \{x \in E \,|\, \forall \varphi \in B, \varphi(x) = 0\}$ l'orthogonal de B dans E.

Proposition 18. *(i) Si* $A_1 \subset A_2 \subset E$*, on a* $A_2^\perp \subset A_1^\perp$.

(ii) Si $B_1 \subset B_2 \subset E^\star$*, on a* $B_2^\circ \subset B_1^\circ$.

Proposition 19. *(i) Si $A \subset E$, on a $A^\perp = (\mathrm{Vect}\, A)^\perp$.*

(ii) Si $B \subset E^\star$, on a $B^\circ = (\mathrm{Vect}\, B)^\circ$.

Proposition 20. *Soit F (resp. G) un sous-espace de E (resp. $E^\star$).*

(i) $\dim_{\mathbb{K}} F + \dim_{\mathbb{K}} F^\perp = \dim_{\mathbb{K}} E$ et $(F^\perp)^\circ = F$.

(ii) $\dim_{\mathbb{K}} G + \dim_{\mathbb{K}} G^\circ = \dim_{\mathbb{K}} E^\star$ et $(G^\circ)^\perp = G$.

Corollaire 21. *(i) Soient p formes linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ de $E^\star$ de rang r. Alors $F = \bigcap_{i=1}^p \mathrm{Ker}(\varphi_i)$ est de dimension $n - r$.*

(ii) Si F est un sous-espace de dimension q, il existe $n - q$ formes linéairement indépendantes $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ telles que $F = \bigcap_{i=1}^p \mathrm{Ker}(\varphi_i)$.

Proposition 22. *Soient A_1, A_2 (resp. B_1, B_2) deux sous-espaces vectoriels de E (resp. $E^\star$). Alors :*

(i) $(A_1 + A_2)^\perp = A_1^\perp \cap A_2^\perp$ et $(B_1 + B_2)^\circ = B_1^\circ \cap B_2^\circ$.

(ii) $(A_1 \cap A_2)^\perp = A_1^\perp + A_2^\perp$ et $(B_1 \cap B_2)^\circ = B_1^\circ + B_2^\circ$.

2) Transposée d'une application linéaire

On considère F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Définition 23. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour tout $f \in E^\star$, on a $f \circ u \in E^\star$. On appelle transposée de u l'application :

$$ {}^{\mathrm{t}}u : \left| \begin{array}{ccc} F^\star & \longrightarrow & E^\star \\ f & \longmapsto & f \circ u \end{array} \right. $$

Remarque 24. *Pour tous $x \in E$ et $\varphi \in F^\star$, on a $\langle \varphi, u(x) \rangle = \langle {}^{\mathrm{t}}u(\varphi), x \rangle$.*

Proposition 25. *Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. On a alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^\star, \mathcal{B}'^\star}({}^{\mathrm{t}}u) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$ et donc $\mathrm{rg}({}^{\mathrm{t}}u) = \mathrm{rg}(u)$.*

Corollaire 26. *En identifiant E et F à leurs biduaux, on a ${}^{\mathrm{t}\,\mathrm{t}}u = u$.*

Proposition 27. *(i) ${}^{\mathrm{t}}(u \circ v) = {}^{\mathrm{t}}v \circ {}^{\mathrm{t}}u$*

(ii) $\mathrm{Im}({}^{\mathrm{t}}u) = (\mathrm{Ker}(u))^\perp$

(iii) $\mathrm{Ker}({}^{\mathrm{t}}u) = (\mathrm{Im}(u))^\perp$

III Applications

1) Réduction de Jordan pour les nilpotents

Définition 28. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle sous-espace caractéristique de u associé à λ l'espace $N_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda Id_E)^\alpha$, où α est la multiplicité de λ dans χ_u.

Proposition 29. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.*
Supposons que $\chi_u = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et $\pi_u = \prod_{i=1}^\rho (X - \lambda_i)^{\beta_i}$, alors :

(i) $E = \bigoplus_{k=1}^{\rho} N_k$, $\dim_{\mathbb{K}} N_k = \alpha_k$, $N_k = Ker(u - \lambda_k Id_E)^{\beta_k}$

(ii) $(u - Id_E)|_{N_k}$ est nilpotent d'indice β_k.

(iii) N_k est stable par u et λ_k est la seule valeur propre de $u|_{N_k}$.

Lemme 30. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice $q \geqslant 1$. Pour tout $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$, la famille $\mathcal{B}_{u,x} = (u^k(x))_{1 \leqslant k \leqslant q-1}$ est une famille libre de E et l'espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_{u,x})$ est u-stable.*

Théorème 31. *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice $q \geqslant 1$. Alors il existe une base $\mathcal{B} = B_1 \cup \ldots \cup B_r$ de E telle que chaque s.e.v. $E_i = \mathrm{Vect}\, \mathcal{B}_i$ soit stable par u et que la matrice de $u|_{E_i}$ soit :*

$$ J_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{q_i}(\mathbb{K}), \ \textit{avec } q_i = \dim_{\mathbb{K}} E_i $$

Théorème 32. *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ non nul tel que $\chi_u = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et $\pi_u = \prod_{i=1}^\rho (X - \lambda_i)^{\beta_i}$. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u soit de la forme :*

$$ A = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_\rho \end{pmatrix} $$

avec pour tout $k \in [\![1, \rho]\!]$:

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon_{k,2} & \lambda_k & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \varepsilon_{k,\alpha_k-1} & \lambda_k & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_{k,\alpha_k} & \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\alpha_k}(\mathbb{K}), \;\; \textit{où } \varepsilon_{k,i} \in \{0,1\}$$

2) Calcul différentiel

On se place sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on considère $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace euclidien.

Proposition 33. *Si $f : E \to \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in E$, alors il existe un unique vecteur, appelé gradient de f en a et noté $\nabla f(a)$, tel que :*

$$\forall\, h \in E, \; d_a f(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$$

Application 34. *Géométriquement, le gradient s'interprète comme la direction de plus grande pente autour de a. C'est l'idée utilisée dans de nombreux algorithmes d'optimisation.*

Théorème 35 (Extrema liés)**.** *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient $g_1, \ldots, g_k$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$ telles que les formes linéaires $d_x g_1, \ldots, d_x g_k$ sont linéairement indépendantes pour tout $x \in U$. Posons :*

$$M = \{x \in U \,|\, \forall\, i \in [\![1, k]\!], \; g_i(x) = 0\}$$

Alors, si f a un extremum lié en $a \in M$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que :

$$d_a f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_k \, d_a g_i$$

Ces réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

Développements

- Réduction de Jordan (par la dualité) (30,31,32) [Rom20]
- Extrema liés (35) [Ave83]

Références

[Gou94] Xavier Gourdon. *Les Maths en Tête : Algèbre.* Ellipses, 2e edition, 1994

[Gri11] Joseph Grifone. *Algèbre Linéaire.* Cépaduès, 4e edition, 2011

[Rom20] Jean-Étienne Rombaldi. *Algèbre et Géométrie.* DeBoeck, 2020

[Ave83] André Avez. *Calcul différentiel.* Masson, 1983